



Серия №8. Усреднение

5 июля

1. На кольцевой дороге длины 25 через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что полицейские могут перейти на требуемые места, пройдя в сумме расстояние, не большее 156.
2. В графе на 16 вершинах 2025 ребер (кратные ребра разрешены). Посчитайте среднее количество ребер среди подграфов на 6 вершинах. Верно ли, что в этом графе обязательно найдется 6 вершин, между которыми суммарно проведено не меньше, чем 254 ребра?
3. В клетках шахматной доски стоят плюсы и минусы, причем плюсов и минусов поровну (32 штуки). Докажите, что можно расставить 8 ладей, не бьющих друг друга так, чтобы не менее 4 ладей стояли на плюсах.
4. а) Докажите, что в произвольном графе можно раскрасить вершины в два цвета таким образом, чтобы не менее половины ребер оказались разноцветными.
б) Граф G содержит $2n$ вершин и m ребер. Докажите, что он содержит двудольный подграф с не менее чем $\frac{mn}{2n-1}$ ребрами.
5. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором хотя бы $\frac{(n-1)!}{2^n}$ гамильтоновых циклов.
6. У инженера Саши есть 99 лампочек и 50 переключателей. Каждая из лампочек подсоединена ровно к 25 переключателям. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные – включаются, включенные – выключаются. Докажите, что Саша может нажать на такие 17 переключателей, что хотя бы 50 лампочек окажутся включенными. Начальное состояние лампочек произвольное.
7. По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ присутствовал специалист по нему. (Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные).
8. Пусть p – простое число, а числа a_1, \dots, a_p – целые. Докажите, что существует целое число k , такое, что числа $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + kp$ дают не менее $\frac{p}{2}$ различных остатков по модулю p .